

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-011

De stelling van Minkowski-Hlawka

Voordracht in de serie
"Actualiteiten"

Dr. C.G. Lekkerkerker



Voordracht in de serie Actualiteiten

door

Dr C.G. Lekkerkerker

op zaterdag 28 april 1956

De stelling van Minkowski-Hlawka

We beginnen met een inleidende beschouwing. Zij M een begrensde lichaam in de Euclidische ruimte R_n ($n \geq 2$), met volume $V=V(M)$. Zij O de oorsprong en zij Λ een rooster in R_n , d.w.z. de verzameling der punten

$$x = u_1 a^{(1)} + u_2 a^{(2)} + \dots + u_n a^{(n)},$$

waar $u_1, u_2, \dots, u_n$ de gehele getallen doorlopen en $\{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}\}$ een stelsel van n onafhankelijke punten is. Met Π zullen we aangeven de fundamenteelcel van Λ , d.i. de verzameling der punten x van de gedaante

$$x = \xi_1 a^{(1)} + \xi_2 a^{(2)} + \dots + \xi_n a^{(n)},$$

waarin $0 \leq \xi_i \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, n$). De inhoud van Π , die gelijk is aan $|\det(a^{(i)}_j)|$ ($a^{(i)}_j = (a^{(i)}_1, a^{(i)}_2, \dots, a^{(i)}_n)$) en de determinant van het rooster Λ heet, stellen we voor door $d(\Lambda)$.

Zij p een willekeurig punt van R_n en stellen we door $p + \Lambda$ voor de verzameling der punten $p+x$, $x \in \Lambda$. Zij $A(p)$ het aantal punten van $p + \Lambda$ in M . Dit aantal zal, gemiddeld genomen, des te groter zijn naarmate het volume van M groter is. Er geldt:

$$(1) \quad \overline{A(p)} = V/d(\Lambda),$$

waarbij men $\overline{A(p)}$ kan definiëren d.m.v.

$$(2) \quad \overline{A(p)} = \frac{1}{d(\Lambda)} \int_{\Pi} A(p) dp$$

(bedenk dat $A(p)$ invariant is voor translaties van R_n die Λ invariant laten). Formule (1) wordt gemakkelijk gevonden als men de karakteristieke functie van M invoert.

Uit (1) volgt: is $V > d(\Lambda)$, dan is er een punt $p=p^{(0)}$ met $A(p^{(0)}) > 1$. Dit is de stelling van Blichfeldt. Anderzijds volgt uit (1) ook: is $V < d(\Lambda)$, dan is er een punt $p^{(1)}$ met $A(p^{(1)}) < 1$, dus $A(p^{(1)})=0$, d.w.z. $p^{(1)} + \Lambda$ heeft géén punt in M .

De verzameling $p^{(1)} + \Lambda$ zal i.h.a. het punt 0 niet bevatten, is een z.g. inhomogeen rooster (Eng.grid). Het rooster Λ heet homogeen. De stelling van Minkowski-Hlawka geeft uitsluitel over de volgende vraag: bestaat er een constante $c > 0$, zó dat, als $V = V(M) < c$, er steeds een homogeen rooster Λ is, met determinant 1, dat géén punt in M heeft. Omdat steeds $0 \in \Lambda$, zullen we in elk geval de eis omtrent Λ nog als volgt moeten rectificeren: Λ heeft géén punt $\neq 0$ in M .

Zij M een begrensd lichaam in R_n . Zij $\mathcal{L}$ een willekeurig gekozen homogeen $(n-1)$ -dimensionaal rooster in het vlak $x_n = 0$ en zij α het positieve getal met $\alpha d(\mathcal{L}) = 1$. Dan heeft elk rooster Λ , voortgebracht door $\mathcal{L}$ en een punt g van de gedaante $g = (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, \alpha)$, determinant 1. Zij $A(g)$ het aantal punten van Λ , dat tot M behoort maar niet in het vlak $x_n = 0$ ligt. We laten nu g variëren, bij vaste $\mathcal{L}$ en α . De punten die bijdragen tot $A(g)$ liggen in de vlakken $x_n = \alpha t$, waarbij t de gehele getallen $\neq 0$ doorloopt. Geheel analoog aan (1), met analoge betekenis voor $\overline{A(g)}$, kan men bewijzen:

$$(3) \quad \overline{A(g)} = \frac{1}{d(\mathcal{L})} \sum_{t=-\infty, t \neq 0}^{\infty} v(\alpha t) = \alpha \sum_{t=-\infty, t \neq 0}^{\infty} v(\alpha t),$$

waarbij $v(\alpha t)$ het $(n-1)$ -dimensionale volume is van de doorsnee van M en het vlak $x_n = \alpha t$. In de som in (3) komen slechts eindig veel termen $\neq 0$ voor, omdat M begrensd ondersteld is.

Thans laten we $\mathcal{L}$ variëren, zodanig dat $\alpha \rightarrow 0$. We kunnen dan bereiken:

1°. $\mathcal{L}$ heeft geen punt $\neq 0$ in M (want $d(\mathcal{L}) \rightarrow \infty$)

2°. $\alpha \sum_{t=-\infty, t \neq 0}^{\infty} v(\alpha t) < V + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), omdat de uitdrukking links

tot V nadert voor $\alpha \rightarrow 0$.

Voorts kunnen we, wegens (3), $g = g^{(0)}$ zó kiezen dat $A(g^{(0)}) \leq \alpha \sum v(\alpha t)$. Is dus $V < 1$ en in 2° het getal ε geschikt gekozen, dan is $A(g^{(0)}) < 1$, dus $A(g^{(0)}) = 0$. In verband met 1° betekent dit dat Λ geen punt $\neq 0$ in M heeft. Dit geeft de volgende

Stelling 1. Is $V < 1$, dan is er een rooster Λ met determinant 1, dat geen punt $\neq 0$ in M heeft.

Is het lichaam M symmetrisch t.o.v. 0, dan is de functie $v(\alpha t)$ even, en dus het rechterlid van (3) gelijk aan $2\alpha \sum_{t=1}^{\infty} v(\alpha t)$. Ook is $A(g)$ even, dus $A(g) = 0$, als maar $A(g) < 2$. Dan mag in stelling 1 de voorwaarde $V < 1$ vervangen worden door $V < 2$.

Is M een sterlichaam t.o.v. 0, dan hoeft men slechts te eisen dat er geen primitieve roosterpunten van Λ in M liggen (een punt $x \in \Lambda$ met $x \neq 0$ heet primitief roosterpunt, als het segment Ox geen verdere punten van Λ bevat). Men kan b.v. afleiden, door toepassing van een

iets gegeneraliseerde vorm van stelling 1:

Stelling 2. Zij S een begrensd sterlichaam, symmetrisch t.o.v. O . Zij $V(S) < 2\zeta(n)$, waarin $\zeta(n) = 1 + 2^{-n} + 3^{-n} + \dots$. Dan is er een rooster Λ met determinant 1, dat geen punt $\neq 0$ in S heeft.

Deze stelling is als bewering uitgesproken door Minkowski ¹⁾ en in 1943 voor het eerst streng bewezen door Hlawka [1]. Later zijn verschillende andere bewijzen gegeven (zie b.v. de literatuuropgaven in [5]). Een zeer kort bewijs is te vinden in Cassels [2]. In stelling 2 kan men zich gemakkelijk ontdoen van de beperkende onderstelling dat S begrensd is (zie Rogers [3], p.1000, r.9).

Van nu af aan onderstellen we dat M symmetrisch t.o.v. O en convex is. In dat geval is, krachtens de stelling van Brunn-Minkowski ²⁾, $\sqrt[n-1]{v(a)}$ een concave functie van a (a reëel, $V(a)$ = volume doorsnee van M en $x_n = a$). Het is ook een even functie van a , omdat M symmetrisch t.o.v. O is. Het gevolg is dat het rechterlid van (3) betrekkelijk klein is ook als α niet dicht bij 0 ligt. Davenport en Rogers [4] leiden een hulpstelling af die als volgt geformuleerd kan worden:

Hulpstelling 1. Zij $0 < \beta < 1$. Dan is $\sum_{t=1}^{\infty} v(\alpha t) \leq \beta v(0)$, als we nemen

$$(4) \quad \alpha = \frac{v}{2v(0)} \cdot \frac{n(1 - \beta^{1/(n-1)})}{1 - \beta^{n/(n-1)}}.$$

Deze hulpstelling maakt het mogelijk een iets scherper resultaat dan stelling 2 af te leiden, en wel door volledige inductie naar n . Laten we, voor $m \geq 2$, met c_m het grootste positieve getal aangeven met de eigenschap:

bij elk convex lichaam M in R_m , symmetrisch t.o.v. O , is er een rooster Λ in R_m met determinant $d(\Lambda) \leq V(M)/c_m$ dat geen punt $\neq 0$ in het inwendige van M heeft.

Stelling 2 is dan gelijkwaardig met de betrekking $c_n \geq 2\zeta(n)$.

Beschouwen we een O -symmetrisch, convex lichaam M in R_n . Krachtens de definitie van c_{n-1} is er een $(n-1)$ -dimensionaal rooster $\mathcal{K}$ in het vlak $x_n = 0$ met determinant $d(\mathcal{K}) = \frac{v(0) + \varepsilon}{c_{n-1}}$ ($\varepsilon > 0$) dat geen punt $\neq 0$ in M heeft. We kiezen nu $\beta = 1/c_{n-1}$ en bepalen daarbij α volgens (4). Op grond van (3) is er een punt $g^{(0)} = (g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, \alpha)$ met

$$A(g^{(0)}) \leq \frac{2}{d(\mathcal{K})} \sum_{t=1}^{\infty} v(\alpha t). \text{ Wegens hulpstelling 1 is dus}$$

$$A(g^{(0)}) \leq \frac{2}{d(\mathcal{K})} \beta v(0) = \frac{2v(0)}{v(0) + \varepsilon} < 2, \text{ dus } A(g^{(0)}) = 0. \text{ Het rooster } \Lambda, \text{ voort-}$$

1) Zie H. Minkowski, Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, Gesammelte Abh. I, p.270.

2) Zie T. Bonnesen-W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Chelsea (1947), p.71 en 88.

gebracht door $\mathcal{K}$ en het punt $g^{(0)}$, heeft dus geen punt $\neq 0$ in M . Daarbij is $d(\Lambda) = \alpha d(\mathcal{K}) = (1 + \frac{\varepsilon}{v(0)}) \frac{V}{2} \cdot \frac{n(c_{n-1}^{1/(n-1)} - 1)}{c_{n-1}^{n/(n-1)} - 1}$. Hieruit volgt (zie [4]):

Stelling 3. Er geldt $c_n \geq \frac{2}{n} \frac{c_{n-1}^{n/(n-1)} - 1}{c_{n-1}^{1/(n-1)} - 1}$.

Davenport en Rogers leiden uit stelling 3 af:

$$(5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n \geq c,$$

waarbij $c > 1$ en $c \log c = 2(c-1)$ ($c=4.921\dots$).

Uitgaande van een schatting voor c_2 kan men afleiden dat zelfs $c_n > c$ voor $n \geq 5$ (zie [5]). We hebben dus een verscherping van stelling 2 verkregen.

In het bewijs van stelling 1 moest het daarin optredende getal α dicht bij 0 worden gekozen, en dus $d(\mathcal{K})$ zeer groot, om te kunnen voldoen aan de eisen 1^0 en 2^0 . Als gevolg heeft het gevonden rooster een zeer verwrongen vorm, vergeleken met het rooster van de punten met gehele coördinaten. Precieser gezegd: er is geen constante k , zó dat men een rooster met de gewenste eigenschappen verkrijgt, dat een basis heeft die bevat is in de kubus $|x_i| < k$ ($i=1,2,\dots,n$).

Letten we nu op de grootte van het getal α , gebruikt in het bewijs van stelling 3. Voor $0 < \beta < 1$ is

$$1 < \frac{n(1 - \beta^{1/(n-1)})}{1 - \beta^{n/(n-1)}} < n$$

wegens $\frac{1 - \beta^{n/(n-1)}}{n(1 - \beta^{1/(n-1)})} = \frac{1}{n} (1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{n-1}), \gamma = \beta^{1/(n-1)}.$

Ligt nu maar $V/v(0)$ tussen redelijke grenzen, dan ligt ook α tussen redelijke grenzen. Dan is enerzijds $d(\mathcal{K})$ niet te groot en anderzijds α niet te groot; op die manier mogen we hopen door volledige inductie een niet te verwrongen rooster Λ met de gewenste eigenschappen te vinden. We gaan nu deze gedachtegang nader uitvoeren.

Zij κ_m het volume van de eenheidsbol in R_m . Laten r_m en s_m niet te veel van 1 afwijkende positieve getallen zijn met de volgende eigenschap: is M een 0-symmetrisch, convex lichaam in R_m , dan is er een $(m-1)$ -dimensionaal hypervlak H_{m-1} door 0, zó dat

$$V(H_{m-1} \cap M) = \Theta_m \kappa_{m-1} \cdot \left\{ V(M)/\kappa_m \right\}^{(m-1)/m}, \quad r_m \leq \Theta_m \leq s_m.$$

Men merke op dat, ingeval M een bol is, voor elke keuze van H_{m-1} geldt: $V(H_{m-1} \cap M) = \kappa_{m-1} \cdot \left\{ V(M)/\kappa_m \right\}^{(m-1)/m}$. Uitgaande van een 0-symmetrisch, convex lichaam M in R_n kiezen we nu achtereenvolgens $H_n = R_n$, H_{n-1} , H_{n-2}

als deelruimte van H_{n-1} , enz., zó dat, als $H_m \cap M = M_m$,

$$(6) \quad V(M_{m-1}) = \Theta_m k_{m-1} \cdot \left\{ V(M_m) / k_m \right\}^{(m-1)/m}, \quad r_m \leq \Theta_m \leq s_m, \quad (m=n, n-1, \dots, 2)$$

We kunnen in elk geval nemen $\Theta_2=1$. Door een rotatie in R_n uit te voeren kunnen we bereiken dat H_m het vlak $x_{m+1}=x_{m+2}=\dots=x_n=0$ is.

Met de bewijsmethode van stelling 3 kan men door volledige inductie naar m , de volgende bewering aantonen (vgl. [5]):

Bewering. Laten de getallen $d_1, d_2, \dots, d_n$ gedefinieerd zijn als volgt:

$$d_1=2, \quad d_2=3, \quad d_m = \frac{2}{m} \frac{d_{m-1}^{m/(m-1)-1}}{d_{m-1}^{1/(m-1)-1}} \quad (m=3, 4, \dots, n).$$

Dan is er een stelsel van n onafhankelijke punten $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$, zodanig dat $a^{(i)} \in H_1$ ($i=1, 2, \dots, n$) en dat voor de roosters Λ_m , voortgebracht in H_m door $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)}$, geldt:

1. Λ_m heeft geen punt $\neq 0$ in het inwendige van M_m
2. $d(\Lambda_m) = V(M_m)/d_m$
3. het punt $a^{(m)}$ is bevat in het blok W_m , bepaald door:

$$|x_1| \leq \frac{1}{2} V(M_1), \quad |x_i| \leq \frac{d_{i-1}}{d_i} \cdot \frac{V(M_i)}{V(M_{i-1})} \quad (i=2, 3, \dots, m).$$

Passen we dit speciaal toe met $m=n$, dan vinden we: er is een rooster Λ met determinant $V(M)/d_n$, dat geen punt $\neq 0$ in het inwendige van M heeft en dat een basis heeft bevat in het blok

$$|x_1| \leq \frac{1}{2} V(M_1), \quad |x_i| \leq \frac{d_{i-1}}{d_i} \frac{V(M_i)}{V(M_{i-1})} \quad (i=2, 3, \dots, n).$$

Men kan laten zien dat d_i tot e nadert (zie p.2) voor $i \rightarrow \infty$. Dus $d_{i-1}/d_i \rightarrow 1$ voor $i \rightarrow \infty$. Verder is, krachtens (6),

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{V(M_i)}{V(M_{i-1})} = \frac{k_i}{\Theta_1 k_{i-1}} \left\{ V(M_1) \right\}^{1/i}, \\ V(M_i) = \Theta_{i+1} \Theta_{i+2}^{1/(i+1)} \Theta_{i+3}^{1/(i+2)} \dots \Theta_n^{1/(n-1)} k_i (V(M)/k_n)^{i/n}. \end{cases}$$

Konden we bewijzen dat we kunnen nemen $\Theta_i=1$ ($i=1, 2, \dots, n$), dan zouden we vinden $V(M_i) = k_i (V(M)/k_n)^{i/n}$, $V(M_i)/V(M_{i-1}) = \frac{k_i}{k_{i-1}} (V(M)/k_n)^{1/n}$. De genoemde basis van Λ zou dan bevat zijn in de bol

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 < b \log n \cdot (V(M)/k_n)^{2/n},$$

waarin b een zekere constante is die niet van n afhangt. Immers

$$k_i/k_{i-1} \sim \sqrt{2\pi}/i.$$

Maar de pogingen om aan te tonen dat men de hypervlakken H_1 zó

kan kiezen dat $\Theta_1=1$, d.w.z. $V(H_{1-1} \cap M) = k_{1-1} \{V(H_1 \cap M)/k_1\}^{(i-1)/i}$ ($i=2,3,\dots,n$), stuiten op moeilijkheden. Om redenen van homogeniteit is het geen bezwaar te onderstellen $V(M_1)=V(H_1 \cap M) = k_1$. Dan heeft M_1 hetzelfde (i -dimensionale) volume als de i -dimensionale eenheidsbol. Zij x' een randpunt van M_1 op maximale afstand van 0. Dan is $|x'| \geq 1$. Zij H_{1-1} het $(i-1)$ -dimensionale hypervlak door 0, loodrecht op de vector x' . Dan is $V(M_1) = k_1 \geq \frac{2}{i} |x'| \cdot V(H_{1-1} \cap M)$, dus $V(M_{1-1}) \leq \frac{1}{2} i k_1$. Dus $\Theta_1 \leq \frac{1}{2} i k_1$. Men kan verder een randpunt x'' van M_1 op minimale afstand van 0 beschouwen, in dat punt een steunvlak aan M_1 aanbrengen en H_{1-1} evenwijdig aan dat steunvlak kiezen. Men vindt dan $V(M_1) \leq 2 |x''| \cdot V(H_{1-1} \cap M)$, dus $V(M_{1-1}) \geq \frac{1}{2} k_1$. Dus $\Theta_1 \geq \frac{1}{2} k_1$. Samenvattend hebben we

$$(8) \quad \frac{1}{2} k_1 \leq \Theta_1 \leq \frac{1}{2} i k_1 \quad (i=2,3,\dots)$$

Door toepassing van de ongelijkheid van Hölder kan men (8) verscherpen. Voor een willekeurige eenheidsvector x geven we met $f(x)$ aan de lengte van het in M bevatte segment van de halfrechte vanuit 0 die door het punt x gaat: $f(x)$ is het positieve getal λ , waarvoor λx op de rand van M ligt. Verder geven we met $h(x)$ aan het $(n-1)$ -dimensionale volume van $M \cap \pi_x$, waarin π_x het $(n-1)$ -dimensionale hypervlak door 0 is dat loodrecht staat op de vector x . We kunnen gemakkelijk $V(M)$ en $h(x)$ uitdrukken m.b.v. de functie $f(x)$. Toepassing van Hölder levert nu (zie [5]): is $V(M) = k_n$, dan is

$$(9) \quad \left[\frac{1}{\omega_n} \int \{h(x)\}^{n/(n-1)} dx \right]^{(n-1)/n} \leq k_{n-1};$$

hierbij wordt de integratie uitgestrekt over de rand van de eenheidsbol en is ω_n de oppervlakte van die eenheidsbol. Formule (9) zegt dat een zekere middelwaarde van $h(x)$ ten hoogste k_{n-1} is. We kunnen dus π_x zó kiezen dat $V(\pi_x \cap M) \leq k_{n-1}$, ingeval $V(M) = k_n$. Dus is $\Theta_n \leq 1$. Dus kan (8) verscherpt worden tot:

$$(10) \quad \frac{1}{2} k_1 \leq \Theta_1 \leq 1 \quad (i=2,3,\dots).$$

Uit (7), (10) en de hierboven aangetoonde bewering kan men de volgende stelling afleiden:

Stelling 4. Zij M een 0-symmetrisch, convex lichaam in R_n met volume V . Zij k_n het volume van de eenheidsbol en zij $d_2=3$, $d_m = \frac{2}{m} \cdot \frac{d_{m-1}^{m/(m-1)-1}}{d_{m-1}^{1/(m-1)-1}}$ ($m=3,4,\dots$). Dan is er een rooster Λ met de volgende

de eigenschappen:

1. Λ heeft geen punt $\neq 0$ in het inwendige van M
2. Λ heeft determinant $d(\Lambda) = V/d_n$
3. Λ heeft een basis die na een geschikte rotatie om 0 bevat is in de kubus $|x_i| < b (V/k_n)^{1/n}$ ($i=1,2,\dots,n$), waar b een vaste, niet

van n afhangelende constante is.

Men mag b.v. nemen $b=2.13$. Voor de getallen d_m geldt:

$\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = c = 4.921\dots$, $d_m > c$ voor $m \geq 6$. Uit eigenschap 3 volgt de iets zwakkere bewering

3'. Λ heeft een basis bevat in de bol om 0 met straal $b_1 n^{1/n}$, waarin b_1 een constante is die niet van n afhangt.

Literatuur

1. E. Hlawka, Zur Geometrie der Zahlen, Math. Zeitschrift 49, 285-312 (1943).
2. J.W.S. Cassels, A short proof of the Minkowski-Hlawka theorem, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49, 165-166 (1953).
3. C.A. Rogers, Existence theorems in the geometry of numbers, Ann. of Math. (2), 48, 994-1002 (1947).
4. H. Davenport-C.A. Rogers, Hlawka's theorem in the geometry of numbers, Duke Math. J. 14, 367-375 (1947).
5. C.G. Lekkerkerker, On the Minkowski-Hlawka theorem, Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. (verschijnt binnenkort).